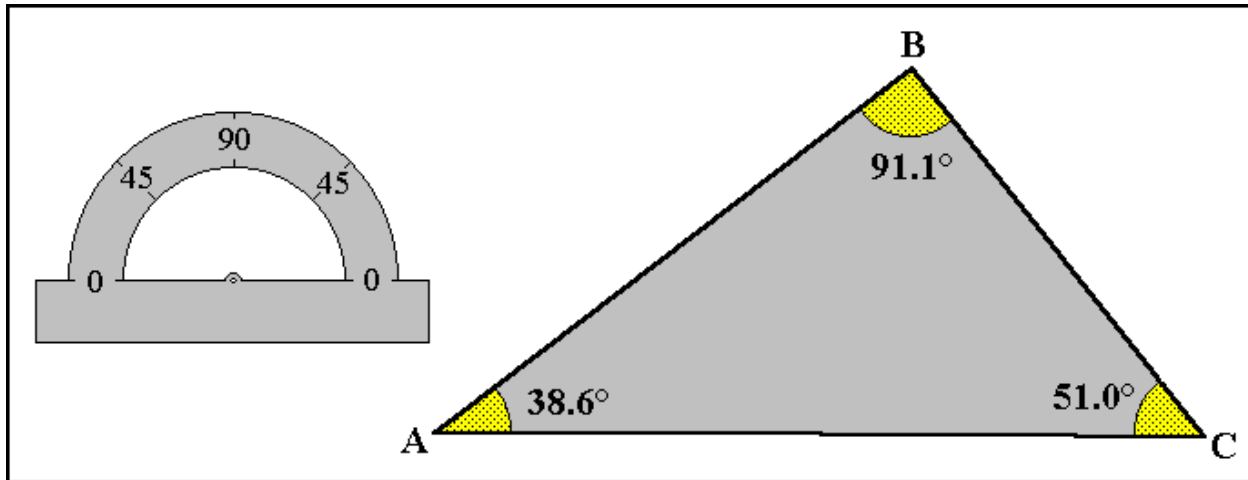




GEODEETTINEN LASKENTA JA PIENIMMÄN NELIÖSUMMAN MENETELMÄ

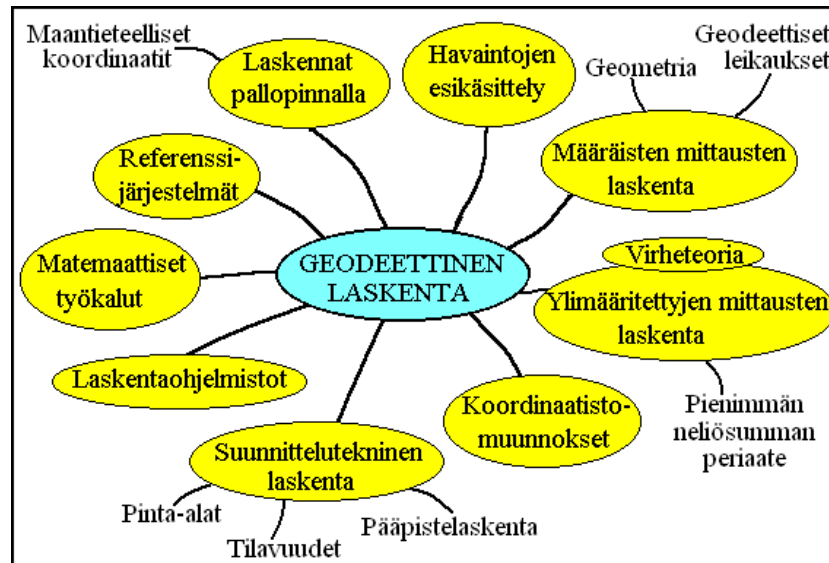
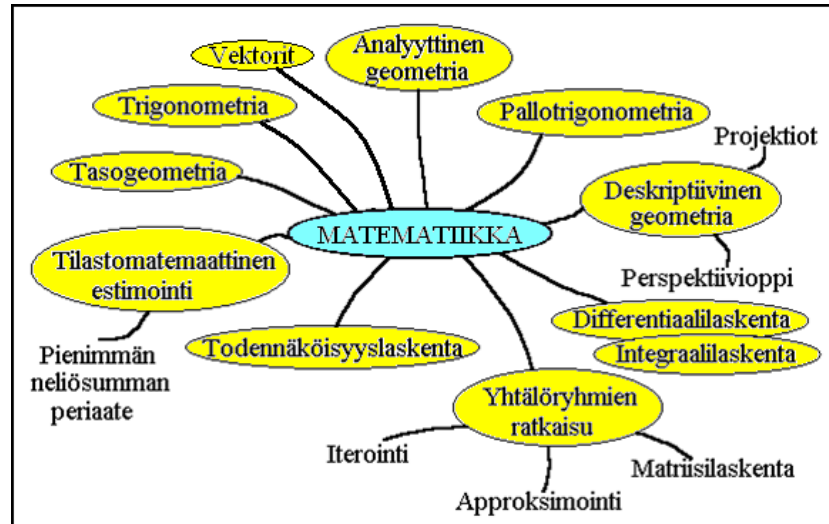
Pasi Laurila / Lapin AMK

17.9.2019

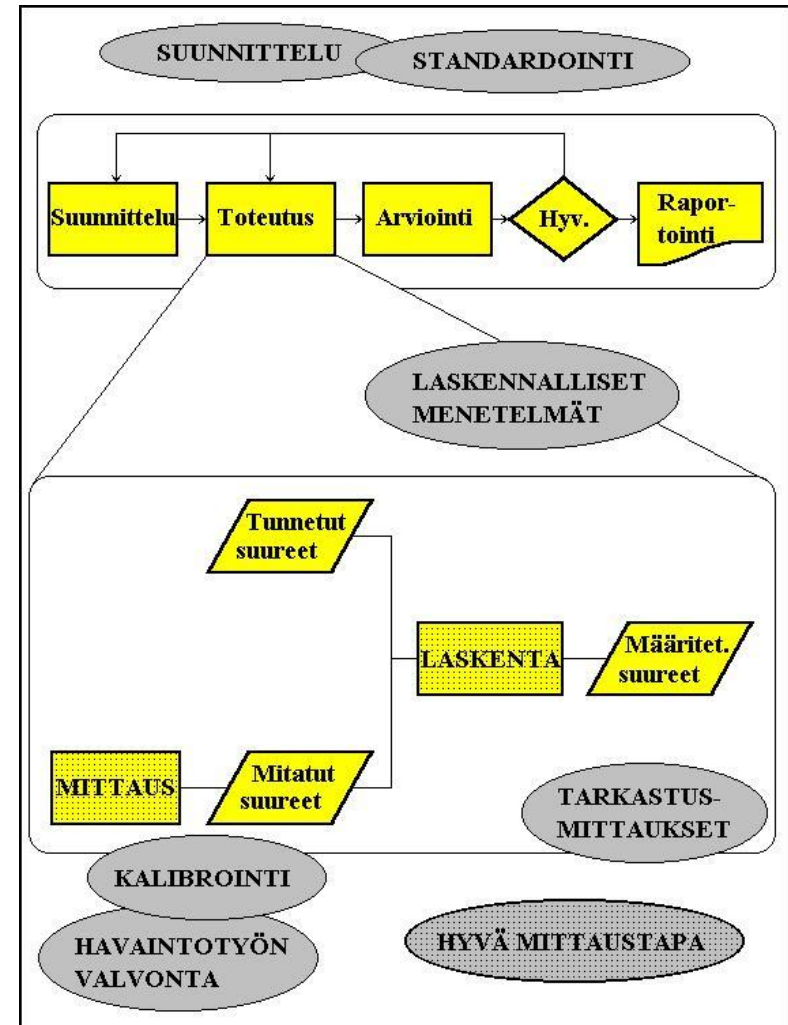
Geodeettinen laskenta

- **Geodeettinen laskenta tarkoittaa geodesiaan ja fotogrammetriaan liittyvää matematiikkaa ja laskentatekniikoita**
- Geodeettisen laskennan asiat liittyvät:
 - Geodeettisten ja fotogrammetristen havaintojen käsittelyyn
 - Mittausten virheisiin ja tarkkuuteen
 - Koordinaatistojen ja projektoiden matematiikkaan
 - Koordinaattimuunnoksiin ja -konversioihin
 - Rakentamisen suunnittelun ja toteutuksen mittauksiin
- Oppimisen näkökulmasta geodeettisessa laskennassa on kyse mittaus- ja kartoitustekniikan asioiden perustelusta
- Oppimisen vuoksi on tarkoituksenmukaista tehdä geodeettiseen laskentaan liittyvää ajattelu- ja käsityötä

Geodeettinen laskennan viitekehykset



Kyse on mittausprosessin laadunvalvonnasta



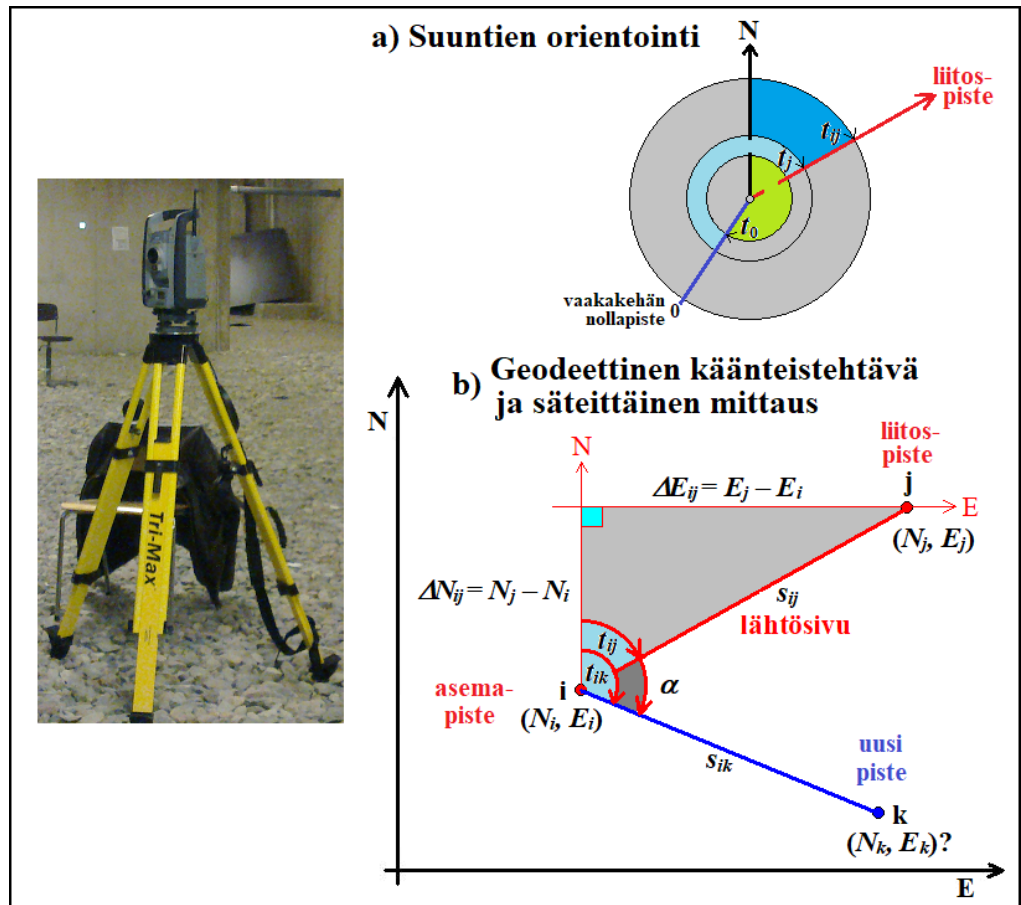
Kirjoittajan ura geodeettisen laskennan parissa

- 1974: lukion pitkä matematiikka
- 1979: diplomi-insinööritutkinnon matematiikka (noin 50 op)
- 1984-1985: kaksi verkkotasoitushjelmaa ja vuoroveden analysointi-ohjelma Georeda Ltd:n palveluksessa
- 1986-1988 sädekimppualueasoi-tusohjelmisto Finnmap Oy:lle
- 1990: lisensiaattitutkimus "Foto-grammetrisen pistetihennyksen laadunvalvonta laskennallis-in menetelmin"
- 1992: julkaisu "Rakennusteknillisten mittauksen laskuharjoitustehtäviä"
- 1992: julkaisu "Satunnaisvirheiden kasautuminen ja tasoituslaskenta"
- 1992: julkaisu "Jonomittauksen laskuesimerkki"
- 2002: julkaisu "Koordinaattijärjes-telmien matematiikkaa"
- 2008 (2012): julkaisu "Mittaus- ja kartoitustekniikan perusteet"
- 2009: julkaisu "Geodeettisen lasken-nan matemaattisia menetelmiä"
- Vuosia itseopiskelua geodeettisen laskennan aiheiden parissa
- Yli 30 vuotta geodeettisen laskennan opetusta

Geodeettisen laskennan perusteet

- Geodeettisen laskennan perusteet ovat geometriaa, erityisesti **analyttistä geometriaa**
- Analyttinen geometria tutkii matemaattisia ongelmia tasotai kolmiulotteisiin **koordinaatistoihin** sijoitettuina
- Geodeettisen laskennan **erityispiirteet** liittyvät mitauskojeiden rakenteeseen, havaintojen suoritukseen, koordinaatistojen määrittelyyn ja maanmittausalan perinteisiin

Trigonometriset funktiot, kolmion ratkaisut, geodeettiset käänteis- ja päätehtävät, geodeettiset leikkaukset



Ylimääritettyjen mittausten laskenta

- Nykykyisin suurin osa geodeettisista ja fotogrammetrisista mittauksista on **ylimääritettyjä mittauksia**
- Mikä tahansa mittausongelma voidaan ratkaista yksikäsitteisesti tehtävästä riippuvalla **minimimäärällä havaintoja**: kun havaintoja tehdään enemmän, on mittaus ylimääritetty
- Ylimääritys tuo tehokkaasti esille, että mittaukset eivät sovi ristiriidattomasti toisiinsa: tämä mahdollistaa **virheiden arvioinnin**, mutta toisaalta synnyttää tarpeen määritellä optimaalinen mittaustulos
- Optimaalinen tulos ratkaistaan lähes aina **pienimmän neliösumman menetelmällä**, mikä on yleisesti käytetty **tilastomatemattinen estimointimenetelmä**
- Estimoinnissa tarvitaan **differentiaalilaskentaa, matriiseja ja tilastomatemattisia testejä**

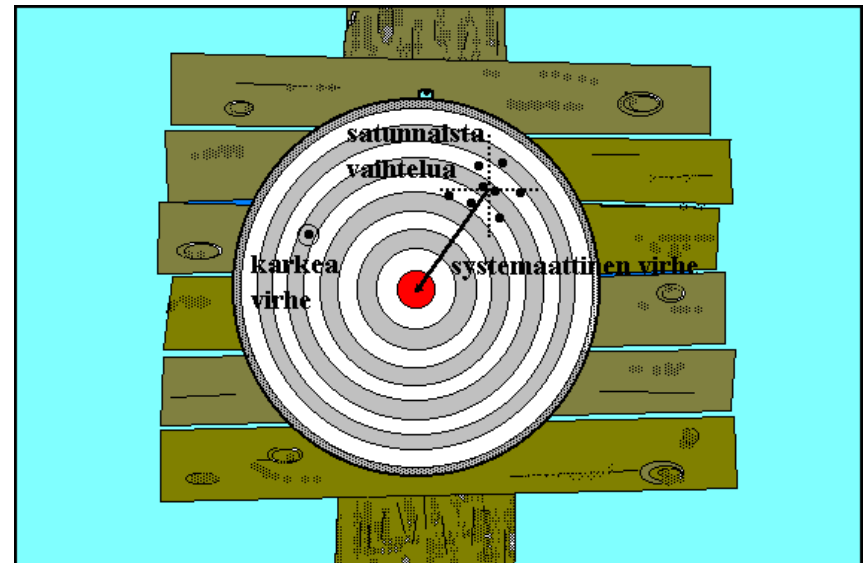
Havaintojen esikäsittely

- **Havainnot tuodaan varsinaiseen laskentaan esikäsittelyn kautta**
- Esikäsittelyssä lasketaan ainakin havaintojen **keskiarvot**
- Arvioidaan myös **havaintojen (a priori) tarkkuus**: perusteena ovat laitevalmistajan tiedot, kalibrointitiedot, toistohavaintojen vaihtelu
- Toistohavaintojen vaihtelu voi tuoda esille **karkeita virheitä**, jotka poistetaan jatkolaskennasta
- Tunnetut **systemaattiset virheet** korjataan: prismavakio, sääkorjaus, refraktiokorjaus ja akselivirheet
- Huomioidaan lopuksi korkeustason ja karttaprojektion vaikutukset etäisyyksiin, kulmiin ja suuntiin: puhutaan **projektiokorjauksista**
- Havaintoihin tehtäviä korjauksia kutsutaan yleisesti **reduktioiksi**
- **Jatkolaskentoihin siirretään vain redukoidut havainnot**

Virheet ja tarkkuus

Virheiden arviointi ja käsittely on minkä tahansa tieteenalan ja erityisesti mittausteknisen alan ydinsisältöä

- Virhe on suureen havaittu arvo miinus oikea arvo
- Tarkkuus on virheen arvioitu suuruus
- Virheet luokitellaan:
 - Karkeat virheet
 - Systemaattiset virheet
 - Satunnaiset virheet



Jos virheitä ei hallita, ei kannata puhua mittausten laadusta

Mittauksissa pyritään tilanteeseen, jossa havainnoissa on vain satunnaisia virheitä

Virheiden luokittelu

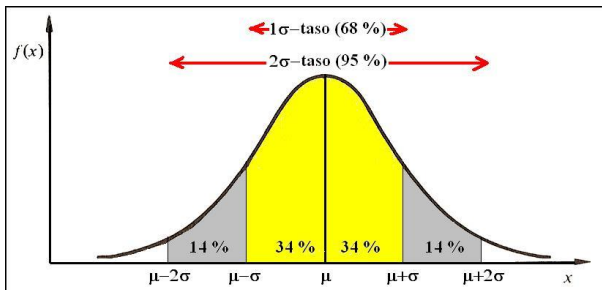
- Karkea virhe → kohdistuu yksittäiseen havaintoon → havaitaan ja poistetaan
- Systemaattinen virhe → kaikkiin havaintoihin tai joukkoon havaintoja samalla tavoin → määritetään ja korjataan
- Satunnainen virhe → kohdistuu kaikkiin havaintoihin ennalta arvaamattomalla tavalla → virheen suuruus arvioidaan toiston ja ylimäärityksen avulla
- Tavoite ja oletus on, että havainnoissa on esikäsittelyn jälkeen vain satunnaisia virheitä

Normaalijakauma ja virhe-ellipsi

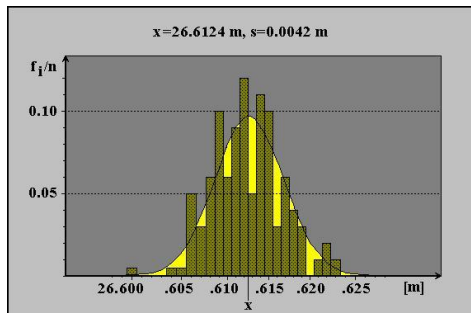
Normaalijakauma on satunnaisten virheiden vaihtelua kuvaava matemaattinen malli

Keskiarvo, keskihajonta ja varianssi

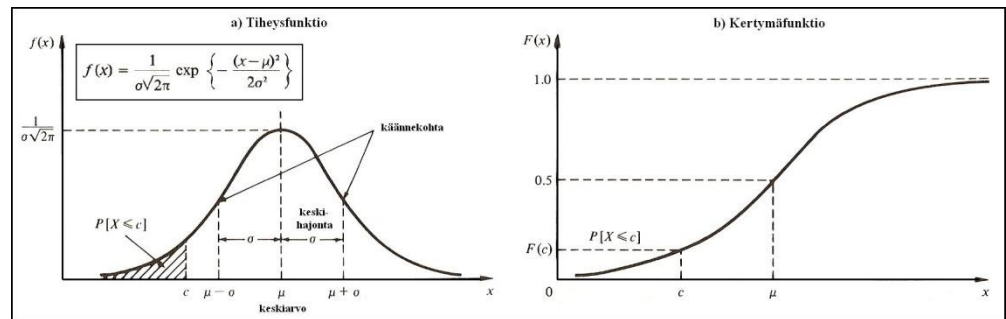
Todennäköisyydet



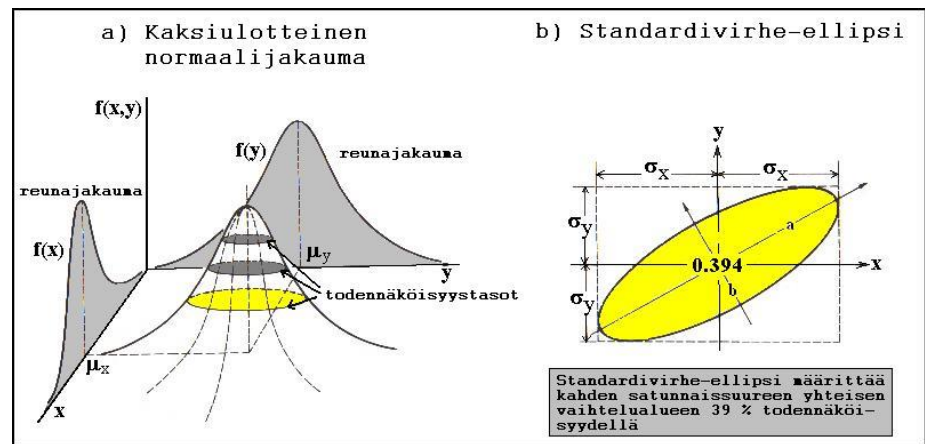
Histogrammi



Tiheysfunktio ja kertymäfunktio



Kaksiulotteinen normaalijakauma ja virhe-ellipsi



Keskiarvo, keskihajonta ja keskiarvon keskihajonta

Yksinkertaisessa toistomittauksessa mittaustulos on havaintojen keskiarvo ja mittaustuloksen tarkkuus on keskiarvon keskihajonta

Keskiarvo $\hat{x} = \frac{\sum \ell_i}{n}$

Jäännösvirhe $v_i = \ell_i - \hat{x}$

Keskihajonta $s = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}}$

Keskiarvon keskihajonta $s_x = \frac{s}{\sqrt{n}}$

Tämä on tärkeä periaate: MITTAUSTULOS TARKENTUU TOISTOSSA, JOS HAVAINNOISSA ON VAIN SATUNNAISIA VIRHEITÄ

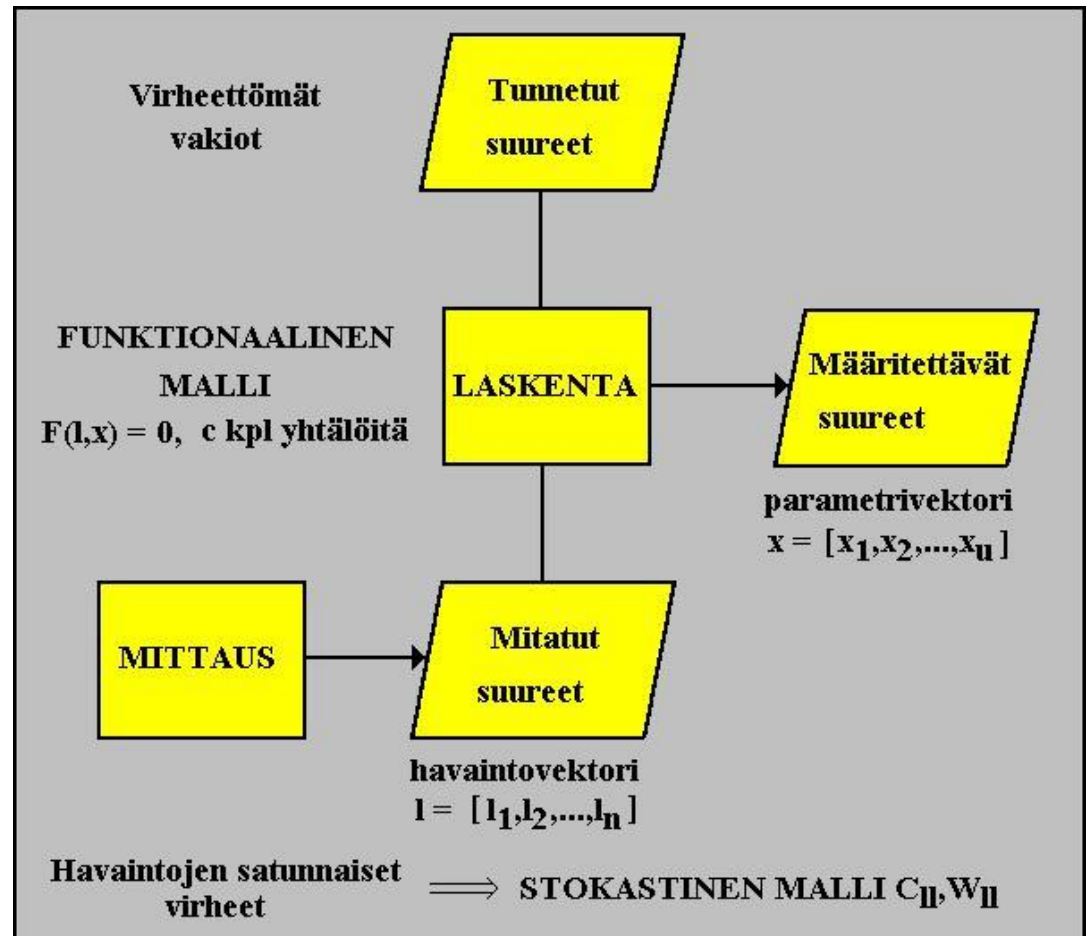
Mittauksen matemaattinen malli

Suureet

Funktionaalinen malli

Stokastinen malli

Mittausten laskenta
perustuu lähinnä
matriisilaskentaan



Takymetrimittauksen määrittäysyhtälöt

Vaakamatkat

$$s_{ij} - \sqrt{(N_j - N_i)^2 + (E_j - E_i)^2} = 0$$

$$s_{ik} - \sqrt{(N_k - N_i)^2 + (E_k - E_i)^2} = 0$$

Vaakasuunnat

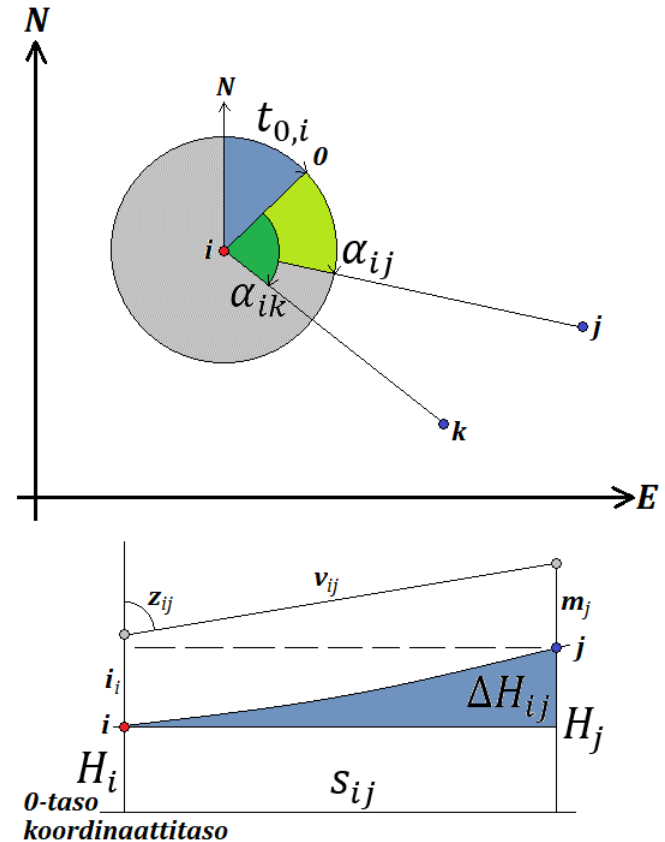
$$\alpha_{ij} + t_{0,i} - \tan^{-1} \left(\frac{E_j - E_i}{N_j - N_i} \right) = 0$$

$$\alpha_{ik} + t_{0,i} - \tan^{-1} \left(\frac{E_k - E_i}{N_k - N_i} \right) = 0$$

Korkeuserot

$$\Delta H_{ij} - H_j + H_i = 0$$

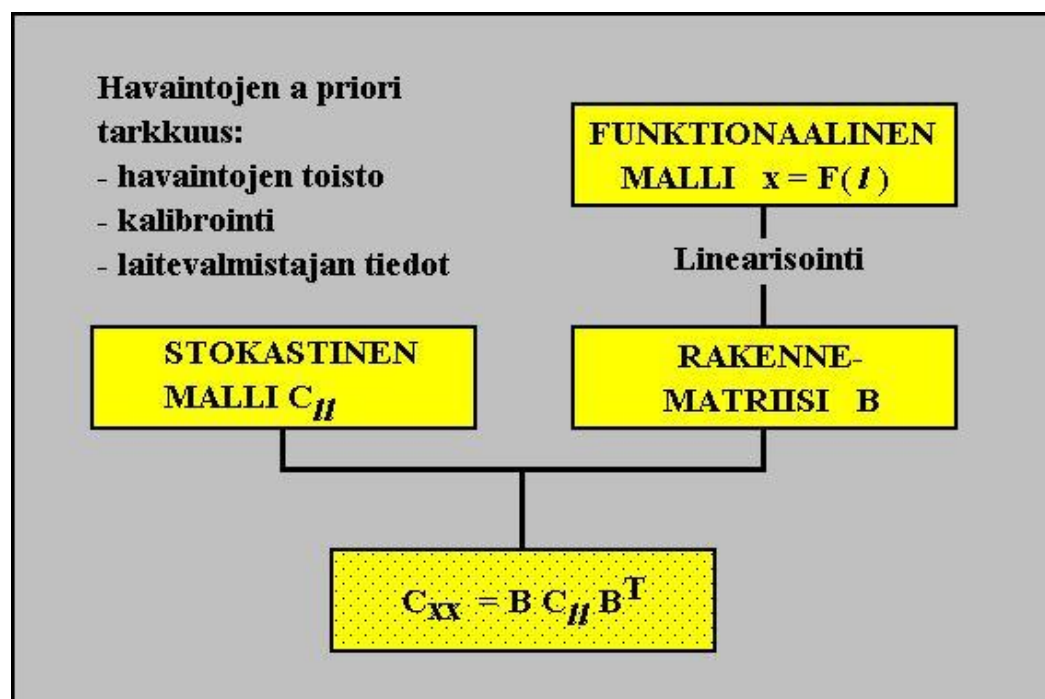
$$\Delta H_{ik} - H_k + H_i = 0$$



Satunnaisvirheiden kasautuminen

- **Tutkitaan virheiden periytymistä**
- Lähdetään liikkeelle havaintojen arvioi-
duista tai oletetuista virheistä (a priori)
- Arvioidaan havain-
noista johdettujen
suureiden virheet
(tarkkuus)

Tämä kaavio kuvaa määräistä mittausta
(redundanssi, ylimääritys, on nolla)



Ylimääritettyjen mittausten laskenta

- Mikä tahansa mittausongelma voidaan ratkaista yksikäsitteisesti ongelmasta riippuvalla minimimäärällä havaintoja
 - Jos ratkaisua varten tehdään enemmän havaintoja kuin minimimäärä, on mittaus ylimääritetty
 - **Ylimääritetyt mittaukset lasketaan pienimmän neliösumman menetelmällä**
 - Pienimmän neliösumman ratkaisussa yhdistyvät tuntemattomien ratkaisu ja niiden tarkkuuden arviointi
- ylimääritys = redundanssi**

Pienimmän neliösumman periaate

Pienimmän neliösumman periaatteen mukaisessa laskennassa varsinaiset tuntemattomat ($\mathbf{x}$) ja havaintojen jäännösvirheet tai residuaalit ($\mathbf{v}$) ratkaistaan minimoimalla jäännösvirheiden painotettu neliösumma

Pienimmän neliösumman tasoitusehto: funktionaalisen mallin ratkaisu haetaan minimoimalla funktio

$$\Phi = \sum_{i=1}^n w_i v_i^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{W}_H \mathbf{v}$$

$$w_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

w_i = havainnon paino

σ_0^2 = a priori varianssikerroin

σ_i^2 = havainnon varianssi

v_i = havainnon residuaali

$\mathbf{v}$ = residuaalivektori

$\mathbf{W}_H$ = painomatriisi

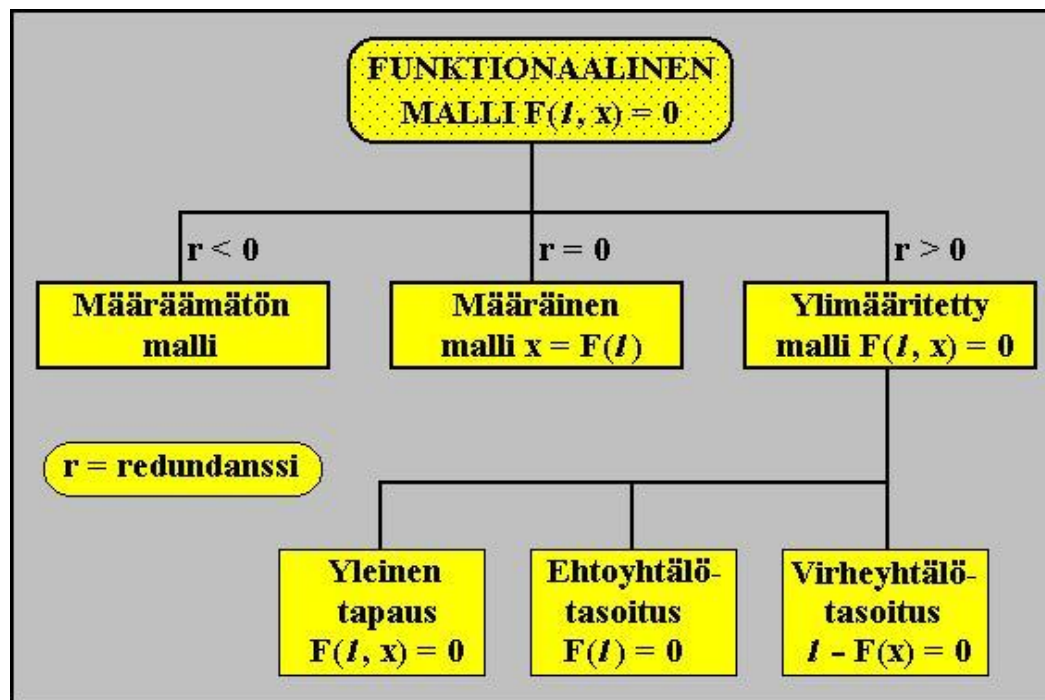
Pienimmän neliösumman menetelmää on käytetty yli 200 vuotta (Adrien Marie Legendre 1805 ja Carl Friedrich Gauss 1797/1809)

Pienimmän neliösumman laskentatapaukset

Yleinen tapaus: koordinaattimuunnokset

Ehtoyhtälötasoitus: käsin laskenta, likimääräisten laskentamenetelmien johto

Virheyhtälötasoitus: yleisin tapa mittausten laskennassa



Laajennuksia:

Pakkoehtoien rajoittamat laskennat

Vapaa tasoitus

Tarkkuuden arviointi

**Tarkkuuden arviointi pienimmän
neliösumman menetelmän
yhteydessä on tasapainoilua
oletusten, teoreettisten näkemysten
ja toteutuneiden virheiden kanssa**

ARVIO	~ verrataan	TOTEUTUMA
Etukäteen (a priori)		Jälkikäteen (a posteriori)
Havaintojen keskihajonnat (σ)		Jäännösvirheet (v)
A priori varianssikerroin (σ_0^2)	~	Estimoitu varianssikerroin ($s_0^2 = \frac{\sum p_i v_i^2}{r}$)
Painot ($p = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}$)		Painoyksikön keskivirhe (s_0)

**Johtopäätökset perustellaan tilasto-
matemaattisten testien avulla**

CHI-SQUARE (χ^2) DISTRIBUTION AND CONFIDENCE TEST

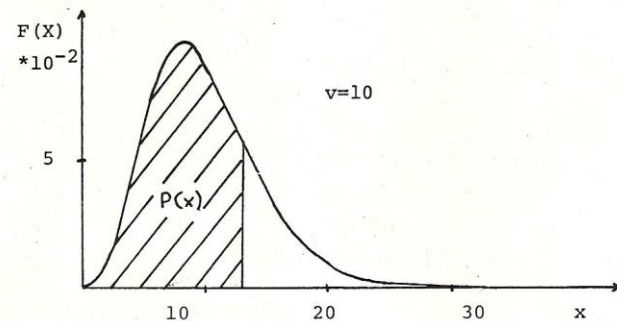
1. χ^2 - distribution probability density function

$$F(x) = \frac{x^{\frac{v}{2}} - 1}{2^{\frac{v}{2}} e^{\frac{x}{2}} \Gamma(\frac{v}{2})} \quad ; x \geq 0$$

$v = \text{degree of freedom}$

v even : $\Gamma(v/2) = (v/2 - 1)!$

v odd : $\Gamma(v/2) = (v/2 - 1)(v/2 - 2) \dots (1/2)\sqrt{\pi}$



2. χ^2 - distribution function

$$P(x) = \int_0^x F(t) dt = \frac{2}{v} x F(x) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(v+2)(v+4) \dots (v+2k)} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = 1$$

3. Confidence test

We test null hypothesis $H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$ at probability level $p\%$

$$H_0 \text{ is accepted when } \frac{v \hat{\sigma}_0^2}{\chi_{p\%}^2} \leq \sigma_0^2 \leq \frac{v \hat{\sigma}_0^2}{\chi_{1-p\%}^2}$$

$$\chi_{p\%}^2 : P(\chi_{p\%}^2) = (1 - \frac{p\%}{100})/2 \quad ; \quad \chi_{1-p\%}^2 : P(\chi_{1-p\%}^2) = (1 + \frac{p\%}{100})/2$$

Kirjallisuutta

- Benning, W. 2011. Statistik in Geodäsie, Geoinformation und Bauwesen. Berlin: Wichmann.
- Blachut, Chrzanowski & Saastamoinen 1979: Urban Surveying and Mapping. New York: Springer-Verlag.
- Kallio 1998. Tasoituslasku. Julkaisu 587. Helsinki: Otatieto.
- Laurila 1992: Satunnaisvirheiden kasautuminen ja tasoituslaskenta. Luentomoniste. Tampere: Tampereen teknillinen korkeakoulu.
- Laurila 2009. Geodeettisen laskennan matemaattisia menetelmiä. Luentomoniste. Rovaniemi: Rovaniemen ammattikorkeakoulu.
- Laurila 2012. Mittaus- ja kartoitustekniikan perusteet. Julkaisu D nro 3. Rovaniemi: Rovaniemen ammattikorkeakoulu.
- Mikhael & Gracie 1981. Analysis and Adjustment of Survey Measurements. New York: Van Nostrand Reinhold Company.
- Salmenperä 2001. Virheteorian ja tasoituslaskennan alkeet. Opetusmoniste 2/2001. Tampere: Tampereen teknillinen korkeakoulu.